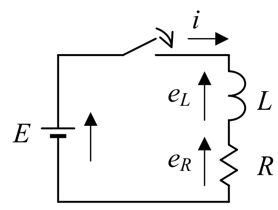
直流 *RL* 回路の解析例

解析方法の基本を理解するために，簡単な直流 *RL* 回路で説明する。

図に示すように，時刻 t=0 でスイッチを閉じ，直流電源 E を *RL* 直列回路へ接続する場合の回路電流 i を求める。回路の電圧方程式は次式となる。



$$L\,pi + R\,i = E$$

上記微分方程式の一般解は，容易に得られ，次式で与えられる。

$$i = \frac{E}{R} + K\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

初期条件 t=0 時の電流 $i(0)$が与えられれば，任意の時刻 t での電流は次式で計算できる。その結果によって，抵抗およびインダクタの電圧も導出できる。

いま，初期電流を $i(0)$とすると

$$i(0) = \frac{E}{R} + K\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}0} = \frac{E}{R} + K$$

であり，t=0 からΔt 経過した時の瞬時電流 $i(\Delta t)$は

$$i(\Delta t) = \frac{E}{R} + K\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}$$

上式は次のように変形できる。

$$i(\Delta t) = \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t})E + \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}(\frac{E}{R} + K)$$

第２項目には初期電流を含んでいる。理想直流電源は一定であるが，その初期電圧を $e(0)=E$ と置くと，次式の関係が得られる。

$$i(\Delta t) = \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t})e(0) + \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}i(0)$$

電圧は一定なので，

$$e(\Delta t) = e(0)$$

さらにΔt 経過（t=2Δt）した時の瞬時電流は

$$i(2\Delta t) = \frac{E}{R} + K\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}2\Delta t}$$

より，次の関係式となる。

$$i(2\Delta t) = \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t})e(\Delta t) + \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}i(\Delta t)$$

同様に計算すると，時刻 $t=k\Delta t$ 時の電流瞬時値は

$$i(k\Delta t) = \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t})e((k-1)\Delta t) + \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}i((k-1)\Delta t)$$

と表すことができる。変数 e と i に乗じる係数は，時間の刻み幅Δt と回路パラメータが与えられれば定数となるので，初期値が与えられれば，瞬時値に定数を乗じることによって，順次，次の瞬時値が得られ，過渡電流を数値計算によって求めることができる。

電源電圧 e と電流 i を状態変数として，解の関係を行列表現すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} e(t+\Delta t) \\ i(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}) & \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

変数 e と電流 i を含む行ベクトル

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = col\begin{bmatrix} e(t) & i(t) \end{bmatrix}$$

を変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ という。また，瞬時値の関係を結びつける行列

$$\boldsymbol{\Phi}(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}) & \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t} \end{bmatrix}$$

を遷移行列という。したがって，瞬時値の関係は，行列表現で次式のように表される。

$$\boldsymbol{x}(t+\Delta t) = \boldsymbol{\Phi}(\Delta t)\,\boldsymbol{x}(t)$$

上式は，次式で与えられる回路方程式の解である。

$$\begin{bmatrix} pe(t) \\ pi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

行列表現で一般に次のように書ける。

$$p\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)$$

行列 $\boldsymbol{A}$ は回路状態によって決まる定係数行列である。

ここで，状態方程式の定係数行列 $\boldsymbol{A}$ と，その解を計算する遷移行列 $\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$ の関係を調べてみる。遷移行列 $\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$ の要素(2,1)と(2,2)をマクローリン級数で表すと

$$\boldsymbol{\Phi}(2,1) = \frac{1}{R}(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t})$$

$$= -\frac{1}{R}\frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)}{1!} - \frac{1}{R}\frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)^2}{2!} - \frac{1}{R}\frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)^3}{3!} - \cdots\cdots - \frac{1}{R}\frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)^n}{n!} - \cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\Phi}(2,2) = \varepsilon^{-\frac{R}{L}\Delta t}$$

$$= 1 + \frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)}{1!} + \frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(-\frac{R}{L}\Delta t)^n}{n!} + \cdots\cdots$$

一方，定係数行列 $\boldsymbol{A}$ の累乗を演算すると

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{R}(-\frac{R}{L})^2 & (-\frac{R}{L})^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{R}{L^2} & (-\frac{R}{L})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{R}(-\frac{R}{L})^3 & (-\frac{R}{L})^3 \end{bmatrix}$$

であり，n 乗は次式となる

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{R}(-\frac{R}{L})^n & (-\frac{R}{L})^n \end{bmatrix}$$

これらの関係から，遷移行列$\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$は定係数行列$\boldsymbol{A}$を用いて，次式で計算できる

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(\Delta t) &= \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}\Delta t}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^2\Delta t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3\Delta t^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{\boldsymbol{A}^n\Delta t^n}{n!} + \cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^n\Delta t^n}{n!} \\ &= exp(\boldsymbol{A}\Delta t) \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$は単位行列であり，遷移行列$\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$の要素の値は，$n$=30 でほぼ収束する。

数値計算では，ある回路動作について，多変数の線形微分方程式から，行列表現の定係数行列$\boldsymbol{A}$を導出すれば，Δt間隔における解，すなわち時刻tと$t+\Delta t$における変数の瞬時値の関係を表す遷移行列$\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$を上式によって求めることにより，容易に任意の初期値からの瞬時値を計算できる。

計算の分解能すなわち刻み幅Δtを一定で計算する場合には，一度，遷移行列$\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$を計算しておけば，瞬時値に順次，遷移行列$\boldsymbol{\Phi}(\Delta t)$を乗じるだけで，過渡状態の瞬時値を求めることができる。